



TITLE:

Quadratic Correspondencesの力学系に関するShaun Bullettの仕事の解説(入門編) (複素力学系の諸問題)

AUTHOR(S):

中井, 武

CITATION:

中井, 武. Quadratic Correspondencesの力学系に関するShaun Bullettの仕事の解説(入門編) (複素力学系の諸問題). 数理解析研究所講究録 1998, 1042: 147-155

ISSUE DATE:

1998-04

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/62088>

RIGHT:

Quadratic Correspondences の力学系に関する Shaun Bullett の仕事の解説 (入門編)

大阪市立大学 理学研究科 中井 武 (Takeshi Nakai)

平成9年12月15日

概要

関数の拡張として、多価関数がある。このノートは特殊な2価の関数による力学系についての Shaun Bullett の仕事を紹介するための入門編である。quadratic correspondence の定義は2次関数及びその逆関数を内包しているが (1.4 例)、ここでは forward image も preimage も2価になるような 2:2-correspondence を扱う。以下、Shaun Bullett の論文 “Dynamics of quadratic correspondences” (Nonlinearity 1 (1988) 27-50), “Mating quadratic maps with the modular group” (*Inventiones mathematicae* 115 (1994) 483-511) にしたがって quadratic correspondences の定義及び基本性質を解説する。

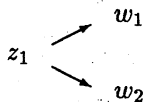
1 Introduction

1.1 Quadratic Correspondence の定義

z, w の両方について1次か2次の多項式

$$\begin{aligned} g(z, w) &= (Az^2 + Bz + C)w^2 + (Dz^2 + Ez + F)w + (Gz^2 + Hz + J) \\ &= \begin{pmatrix} z^2 & z & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & D & G \\ B & E & H \\ C & F & J \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w^2 \\ w \\ 1 \end{pmatrix} \\ &\quad (A, B, C, D, E, F, G, H, J \in \mathbb{C}) \end{aligned}$$

で、 $(z^2 + az + b)$ や $(w^2 + aw + b)$ や $(z + c)$ や $(w + c)$ (a, b, c は定数) のような z のみあるいは w のみの多項式を因数にもたないものを考える。[¶] このような $g(z, w)$ に関して、 z を $z = z_1$ と固定し $g(z_1, w) = 0$ を w について解くと、2つ ($A = B = C = 0$ のときは1つ) の $w = w_1, w_2$ が得られる。 z_1 にたいしてこれら2つの w_1, w_2 を対応させると決めると、 $\hat{C} (:= \mathbb{C} \cup \{\infty\})$ から \hat{C} への2価 ($A = B = C = 0$ のときは1価) の写像が決まる。



このような対応を $g(z, w) = 0$ により定義される quadratic correspondence といい、 $f: z \mapsto w$ で表わすことにする;

$$f(z) := \{w \in \hat{C} \mid g(z, w) = 0\}.$$

[¶] たとえば、 $g(z, w)$ が因数 $(z + c)$ をもつとすると、 $z_1 = -c$ に対し任意の $w \in \hat{C}$ が対応することになるので、このようなものは扱わないことにする。

逆に、 $f^{-1}(w) := \{z \in \widehat{\mathbb{C}} \mid g(z, w) = 0\}$ とすれば、 $f^{-1} : w \mapsto z$ も quadratic correspondence である；

$$f(z) \ni w \Leftrightarrow g(z, w) = 0 \Leftrightarrow z \in f^{-1}(w)。$$

$f(z)$ を z の $g(z, w) = 0$ による像 (forward image)、 $f^{-1}(z)$ を z の $g(z, w) = 0$ による逆像 (preimage, backward image) という。

注意 1 一般に ($A = B = C = 0$ でなければ) $f \circ f^{-1} \neq id$ である (map との違いに注意；図 1 参照)。

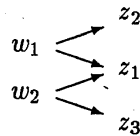


図 1: $f \circ f^{-1}(z_1)$

注意 2 (∞ の扱いについて)

$f(\infty) \ni w_0$ ($\Leftrightarrow \infty \in f^{-1}(w_0)$) であることを、「 $g(1/z', w) = 0$ の分母を払って新たにそれを $g'(z', w) = 0$ と書き直したとき、 $g'(0, w_0) = 0$ となる」で定義する。

同様に、 $f(z_0) \ni \infty$ ($\Leftrightarrow z_0 \in f^{-1}(\infty)$) であることを、「 $g(z, 1/w') = 0$ の分母を払って新たにそれを $g'(z, w') = 0$ と書き直したとき、 $g'(z_0, 0) = 0$ となる」で定義する。

1.2 力学系としての同値関係

quadratic correspondence $g_2(z, w) = 0$ が $g_1(z, w) = 0$ と同値であることを、「ある $M \in PSL(2, \mathbb{C})$ が存在して、 $g_1(z, w) = 0$ ならば $g_2(Mz, Mw) = 0$ となる」すなわち、「 g_1 と g_2 は Möbius 変換で移り合う」で定義する。

1.3 grand orbits

$S \subset \widehat{\mathbb{C}}$ としたとき、 $f(S) := \{w \in \widehat{\mathbb{C}} \mid \exists z \in S \text{ s.t. } g(z, w) = 0\}$ とする。quadratic correspondence f に関する z の grand orbit $GO(z; f)$ を次のように帰納的に定義する；

$$GO(z; f) := \bigcup_{n \geq 0} O_n; \quad \text{ただし } O_0 := \{z\}, \quad O_{n+1} := f(O_n) \cup f^{-1}(O_n)。$$

1.4 例

(i) $\widehat{\mathbb{C}} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ の双正則写像を quadratic correspondence で表現すると

$$g(z, w) = czw + dw - az - b$$

となる。実際、 f を $\widehat{\mathbb{C}}$ から $\widehat{\mathbb{C}}$ への双正則写像とすると、 f は Möbius 変換だから、 $f : z \mapsto \frac{az+b}{cz+d} = w$ とおいて分母を払うと $czw + dw - az - b = 0$ となる ($g(z, w) = (czw + dw - az - b)^2$ と書ける)。

(ii) 2 次関数 $z \mapsto z^2 + c$ は $g(z, w) = w - (z^2 + c)$ で与えられる。

(iii) (ii) の逆関数は $g(z, w) = z - (w^2 + c)$ で与えられる。

(iv) $g(z, w) = (w - (z + 1))(w(z + 1) + 1)$ の grand orbit $GO(z, f)$ は z の $PSL(2, \mathbb{Z})$ による orbit になる。

1.5 2:2-correspondences

quadratic correspondence のうち、 $g(z, w)$ が z と w の両方について 2 次式であるものを 2:2-correspondence ということにする。

注意 3 2:2-correspondence

$$g(z, w) = (Az^2 + Bz + C)w^2 + (Dz^2 + Ez + F)w + (Gz^2 + Hz + J) = 0$$

において、 $w_1 = w_2$ (重解) となる z は

$$(Dz^2 + Ez + F)^2 - 4(Az^2 + Bz + C)(Gz^2 + Hz + J) = 0 \quad (1)$$

の解である。この (1) 式の解となる z を f の singular point と呼び、その集合 $\{z \in \hat{\mathbb{C}} \mid \#f(z) = 1\}$ を $S(f)$ で表す。 $\#S \leq 4$ である。

1.6 quadratic correspondences のグラフからの観点

(z, w) が $g(z, w) = 0$ で定義される quadratic correspondence f のグラフ

$$\Gamma(f) := \{(z, w) \in \hat{\mathbb{C}} \times \hat{\mathbb{C}} \mid g(z, w) = 0\}$$

上の点であることと、 $f: z \mapsto w$ であることは同値である。

ここで、代数曲線としての $\Gamma(f)$ の形状は $S(f)$ により、次の 3 つに分類される。

- (i) (1) が異なる 4 つの解を持つとき、 $\Gamma(f)$ はトーラスである。
- (ii) (1) が 1 つの 2 重解と 2 つの異なる解を持つとき、 $\Gamma(f)$ は 1 点で自己交差する球面になる。また、1 つの 3 重解と 1 つの他の解をもつときも $\Gamma(f)$ は特異点を 1 つもつ球面になる。
- (iii) (1) が 2 つの 2 重解を持つとき、 $\Gamma(f)$ は 2 点を共有する 2 つの球面になる。また、1 つの 4 重解をもつときは、 $\Gamma(f)$ は 1 点を共有する 2 つの球面になる。

射影 $\pi_1: \Gamma(f) \rightarrow \hat{\mathbb{C}}, \pi_2: \Gamma(f) \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ を $\pi_1(z, w) = w, \pi_2(z, w) = z$ (違和感が感じられるが、S.Bullett に従い、「 π_1 は第 1 成分を忘れる」、「 π_2 は第 2 成分を忘れる」と覚える) として、 I_1, I_2 を π_1, π_2 の covering involution とする。すなわち、 $f^{-1}(w) = \{z_1, z_2\}, f(z) = \{w_1, w_2\}$ とすると、

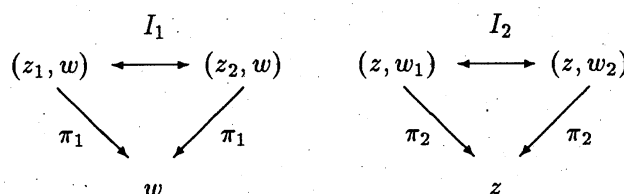


図 2: グラフからの射影と covering involution

である。 π_1, π_2 を用いると、 f, f^{-1} は $f = \pi_1 \circ \pi_2^{-1}, f^{-1} = \pi_2 \circ \pi_1^{-1}$ と表現できる。

2 Maps of Pairs

2.1 定義

2:2-correspondence $f: \hat{C} \ni z \mapsto w \in \hat{C}$ が map of pairs であることを、「任意の $z_1 \in \hat{C}$ にたいして $f(z_1) = \{w_1, w_2\}$, $f^{-1}(w_1) = \{z_1, z_2\}$, $f^{-1}(w_2) = \{z_1, z_3\}$ としたとき、 $z_3 = z_2$ となる」で定義する。(右下の図式を $f: \{z_1, z_2\} \mapsto \{w_1, w_2\}$ で表わすことにする。)

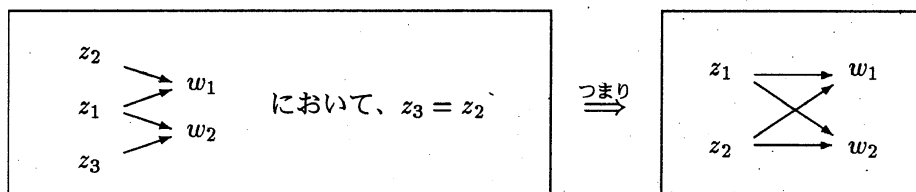


図 3: map of pairs

注意 4 f を 2:2-correspondence とすると $f: z \mapsto w$ が map of pairs であることと $f^{-1}: w \mapsto z$ が map of pairs であることは同値である。

(証明) (\Rightarrow) 任意の $w_1 \in \hat{C}$ にたいし、 $f^{-1}(w_1) = \{z_1, z_2\}$, $f(z_1) = \{w_1, w_2\}$, $f^{-1}(w_2) = \{z_1, z_3\}$ とすると f が map of pairs であることから、 $z_2 = z_3$ である。よって $f(z_2) = \{w_1, w_3\}$ とすると $w_3 = w_2$ 。ゆえに、 f^{-1} は map of pairs である。

(\Leftarrow) (\Rightarrow) と同様の方法で示すことができる。

【命題】 方程式 $g(z, w) = (Az^2 + Bz + C)w^2 + (Dz^2 + Ez + F)w + (Gz^2 + Hz + J) = 0$ で定義される 2:2-correspondence $f: z \mapsto w$: に対して、次の (1) ~ (4) は同値である。

(1) f は map of pairs である。

(2)
$$\begin{vmatrix} A & D & G \\ B & E & H \\ C & F & J \end{vmatrix} = 0$$
 である。

(3) ある 2 次有理式 p, q があって、 $g(z, w) = 0$ は $p(z) = q(w)$ と変数分離できる。

(4) グラフ $\Gamma(f)$ の covering involution I_1, I_2 は可換である。すなわち、 $I_1 I_2 = I_2 I_1$ である。

(証明) $((1) \Rightarrow (2))$ map of pairs $f: \{z_1, z_2\} \mapsto \{w_1, w_2\}$ において、写像 $\Psi: w_1 \mapsto w_2$ は双正則な involution だから、 Ψ はつぎの (i), (ii) のいずれかである。

(i) $\Psi(w) = \frac{(a+b)w - 2ab}{2w - (a+b)}$ ($\infty \notin \text{Fix}(\Psi) = \{a, b\}$ のとき)。

(ii) $\Psi(w) = 2c - w$ ($\text{Fix}(\Psi) = \{\infty, c\}$ のとき)。

(i) のとき、 $w_2 = \frac{(a+b)w_1 - 2ab}{2w_1 - (a+b)}$ より、 $w_1 w_2 = \frac{a+b}{2}(w_1 + w_2) - ab$ (*)。解と係数の関係より

$$w_1 w_2 = \frac{Gz_1^2 + Hz_1 + J}{Az_1^2 + Bz_1 + C}, \quad w_1 + w_2 = -\frac{Dz_1^2 + Ez_1 + F}{Az_1^2 + Bz_1 + C}.$$

これらを上の (*) に代入して整理すると、

$$(Gz_1^2 + Hz_1 + J) = -\frac{a+b}{2}(Dz_1^2 + Ez_1 + F) - ab(Az_1^2 + Bz_1 + C)$$

これが任意の $z_1 \in \mathbb{C} \setminus \{z \in \mathbb{C} \mid (Az^2 + Bz + C) = 0\}$ で成立するから、ベクトル $(G H J), (D E F), (A B C)$ は \mathbb{C} 上 1 次従属である。よって題意は成立する。(ii) のとき、(i) と同様の方法で示せる。

((2) \Rightarrow (3)) 仮定 (2) より、ある $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ が存在して

$$\alpha(A B C) + \beta(D E F) + \gamma(G H J) = (0 \ 0 \ 0).$$

$\gamma \neq 0$ のとき、 $(G H J) = -\left(\frac{\alpha}{\gamma}(A B C) + \frac{\beta}{\gamma}(D E F)\right)$ 、すなわち任意の $z \in \mathbb{C}$ にたいし、

$$(Gz^2 + Hz + J) = -\left(\frac{\alpha}{\gamma}(Az^2 + Bz + C) + \frac{\beta}{\gamma}(Dz^2 + Ez + F)\right).$$

これを $g(z, w) = 0$ に代入すれば、 $(Az^2 + Bz + C)(w^2 - \frac{\alpha}{\gamma}) + (Dz^2 + Ez + F)(w - \frac{\beta}{\gamma}) = 0$ 。

$$\therefore -\frac{w^2 - \alpha/\gamma}{w - \beta/\gamma} = \frac{Dz^2 + Ez + F}{Az^2 + Bz + C}$$

ゆえに題意は成立する。 $\gamma = 0, \beta \neq 0$ のときも上と同様の方法で変数分離できる。

$\gamma = 0, \beta = 0$ のとき、 $(A B C) = (0 \ 0 \ 0)$ 。このとき $f: z \mapsto w$ が 1 価となり f が 2:2-correspondence であることに矛盾する。

((3) \Rightarrow (4)) p, q は 2 次有理式だから $\hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ の double covering になっている。これらの covering involution をそれぞれ Φ, Ψ として、 $p(z) = q(w)$ すなわち $(z, w) \in \Gamma(f)$ とすると、

$$I_1(z, w) = (\Phi(z), w), \quad I_2(z, w) = (z, \Psi(w))$$

ゆえに、 $I_1 I_2(z, w) = I_1(z, \Psi(w)) = (\Phi(z), \Psi(w)) = I_2(\Phi(z), w) = I_2 I_1(z, w)$ 。

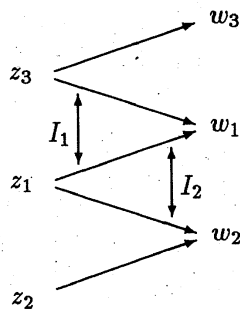
(注意 p の critical point の集合は Φ の固定点の集合と等しい。また、 q の critical point の集合は Ψ の固定点の集合と等しい。)

((4) \Rightarrow (1))

$f(z_1) = \{w_1, w_2\}$, $f^{-1}(\{w_1, w_2\}) = \{z_1, z_2, z_3\}$, $f(z_3) = \{w_1, w_3\}$ とする。 $(z_1, w_1) \in \Gamma(f)$ にたいして $I_1 I_2 = I_2 I_1$ を適用して

$$\begin{aligned} I_1 I_2(z_1, w_1) &= I_1(z_1, w_2) = (z_2, w_2) \\ &\parallel \\ I_2 I_1(z_1, w_1) &= I_2(z_3, w_1) = (z_3, w_3) \end{aligned}$$

したがって $z_2 = z_3$, $w_2 = w_3$ 。ゆえに f は map of pairs である。 ■



3 Maps of Triples

3.1 定義

2:2-correspondence $f: z \mapsto w$ のうち次の図式を満足するものを map of triples と呼ぶ。

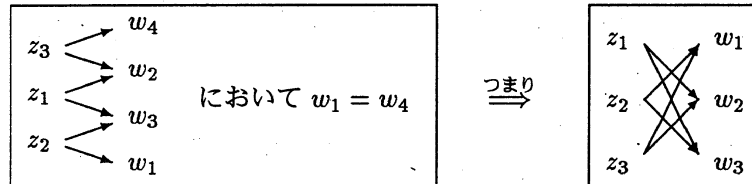


図 4: map of triples

すなわち、map of triples f は任意の $z_1 \in \hat{C}$ にたいし $f(z_1) = \{w_2, w_3\}$, $f^{-1}(w_2) = \{z_1, z_3\}$, $f^{-1}(w_3) = \{z_1, z_2\}$, $f(z_2) = \{w_3, w_1\}$, $f(z_3) = \{w_2, w_4\}$ とすると、 $w_1 = w_4$ となる 2:2-correspondence である。

【命題】 f を 2:2-correspondence とし、 I_1, I_2 を小節 1.6 のように定義する。このとき f が map of triples であることと、 $I_1 I_2 I_1 = I_2 I_1 I_2$ であることは同値である。

(証明は map of triples の定義より明らかなので略。)

注意 5 $\langle I_1, I_2 \rangle \cong D_6$ (D_6 は dihedral group (正 2 面体群)) である。

【命題】 i) C を 3 次有理式とし、 $M \in \text{Möb}(C)$ とする。

$$f(z) := \{w \in \hat{C} \mid C(Mz) = C(w); w \neq Mz\}$$

$$f^{-1}(w) := \{z \in \hat{C} \mid C(Mz) = C(w); z \neq M^{-1}w\}$$

とすると、 f は map of triples になる。

ii) 逆に、任意の map of triples $f: z \mapsto w$ に対し、ある 3 次有理式 C とただひとつの $M \in \text{Möb}(C)$ が存在して、

$$\Gamma(f) \ni (z, w) \implies C(Mz) = C(w)$$

となり、更に C はメビウス変換を左から施したものを同一視して unique である。

(証明) i) $C(w) - C(Mz) = 0$ を $(w - Mz)$ で割ったものが f を 2:2-correspondence で表現したものである。任意の $z_1 \in \hat{C}$ を固定し、 $C(Mz_1) = \zeta$ とし、

$$(CM)^{-1}(\zeta) := \{z_1, z_2, z_3\}, \quad C^{-1}(\zeta) := \{w_1, w_2, w_3\}$$

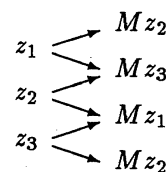
とする。 $\{w_1, w_2, w_3\} = C^{-1}(\zeta) = MM^{-1}C^{-1}(\zeta) = M(CM)^{-1}(\zeta) = M\{z_1, z_2, z_3\} = \{Mz_1, Mz_2, Mz_3\}$ より、 $w_i = Mz_i$ ($i = 1, 2, 3$) としてよい。

f の定義より、

$$f(z_1) = \{Mz_2, Mz_3\}$$

$$f(z_2) = \{Mz_3, Mz_1\}$$

$$f(z_3) = \{Mz_1, Mz_2\}.$$



したがって f は map of triples である。

ii) の証明

$f: z \mapsto w$ を 2:2-correspondence $g(z, w) = 0$ により定義される map of triples とする。 $z_1 \in \hat{C}$ にたいして map of triples f と f^{-1} を交互に施して得られるすべての orbit は次の3つの図式のいずれかしか満たさない (1つ目の図は一般の点におけるもので、2つ目、3つ目の図は singular point におけるもの)。

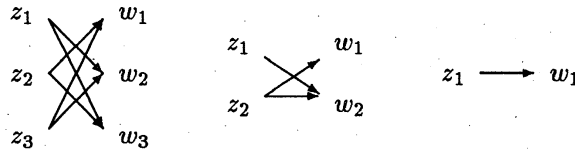


図 5: $f(z_1), f^{-1}f(z_1), ff^{-1}f(z_1), \dots$

ここで M を次のように定義する。

$$M(z) = \begin{cases} f(z) & (z \text{ が singular point のとき}) \\ ff^{-1}f(z) \setminus f(z) & (z \text{ が singular point でないとき}) \end{cases}$$

すなわち、上の図式において、 $M(z_1) = w_1$ とすると、 M は \hat{C} から \hat{C} への 1 対 1 双正則写像であるから、 M は Möbius 変換である。したがって、上の図式のすべての $w_i (i = 1, 2, 3)$ について $w_i = Mz_i$ となる。そこで、 $g(M^{-1}z, w) = 0$ により定義される 2:2-correspondence h を考える。 h は $h = f \circ M^{-1}$ であり、更に map of triples である。

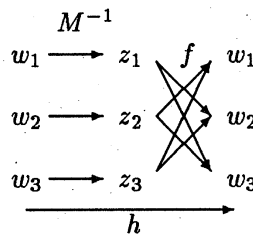


図 6: $h = f \circ M^{-1}$

ここで、 $w_1, w_2 \in \hat{C}$ の間に関係 $w_1 \sim w_2$ があることを

$$hh^{-1}(w_1) \ni w_2$$

で定義すると、 h が map of triples であることから関係 \sim は同値関係になる ($w_1 \sim w_2$ であることと $h^{-1}h(w_1) \ni w_2$ であることは同値である)。 \hat{C} から \hat{C}/\sim への自然な射影 $w \mapsto [w]$ を \tilde{p} とし、これを用いて \hat{C} から \hat{C}/\sim へ自然な位相を入れると \hat{C}/\sim には単連結コンパクトリーマン面の構造がはいるから、ある双正則写像 φ が存在して

$$\varphi: \hat{C}/\sim \xrightarrow{\cong} \hat{C}$$

となる。よって、 $C := \varphi\tilde{p}$ とすれば、 C は \hat{C} から \hat{C} への被覆度 3 の holomorphic covering map になっているので C は 3 次有理式である。

3 点 $\{w_1, w_2, w_3\}$ は h により不変であるので、 $(z, w) \in \Gamma(h)$ ならば

$$C(z) = C(w)$$

すなわち、 $(Mz, w) \in \Gamma(h)$ ならば $C(Mz) = C(w)$ 。 $(Mz, w) \in \Gamma(h)$ と $(z, w) \in \Gamma(f)$ は同値であるから、 $(z, w) \in \Gamma(f)$ ならば $CM(z) = C(w)$ がいえる。

M の unique 性については作り方より明ら。また、 C が左から Möbius 変換を施したものを同一視すれば unique であることは、次のようにして分かる。任意の $w_1 \sim w_2$ なる点 $w_1, w_2 \in \hat{\mathbb{C}}$ にたいし、 $C_1(w_i) = C_2(w_i)$ ($i = 1, 2$) となる C_1, C_2 が存在すれば、 $\mu := C_2 C_1^{-1}$ は 1 価正則な写像であり、また $\mu^{-1} = C_1 C_2^{-1}$ となる。 μ も 1 価正則な写像であるので、 μ は Möbius 変換である。したがって、 $\zeta_1 := C_1(w)$, $\zeta_2 := C_2(w)$ とすると、対応 $\zeta_1 \mapsto \zeta_2$ は μ によるものだから、 $C_2 := \mu C_1$ となる。以上により、命題は証明できた。 ■

このことから、上の図式は図 7 のように描ける。

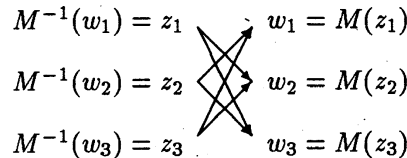


図 7: map of triples

以降、 $C \circ M(z) = C(w)$ と書けば、map of triples のこととする。

3.2 reversible maps of triples

map of triples $C \circ M(z) = C(w)$ において M が involution のとき、 $M =: J$ と書いて、reversible map of triples と呼ぶ。

注意 6 $C \circ M(z) = C(w)$ で表わされる map of triples $f: z \mapsto w$ が「reversible である」ことと、「 $f: z \mapsto w \xLeftrightarrow{\text{iff}} f: Mw \mapsto Mz$ 」であることは同値である。

(略証) $C \circ J(J(w)) = C(w) = C(J(z))$.

注意 7 $\Gamma(f)$ を f のグラフとし、 $(z, w) \in \Gamma(f)$ に対し $\pi_1(z, w) = w$, $\pi_2(z, w) = z$ とする。 I_1, I_2 をそれぞれ π_1, π_2 の covering involutions とすると、

f が reversible map of triples である。 $\xLeftrightarrow{\text{iff}} I_1 I_2 I_1(z, w) = I_2 I_1 I_2(z, w) = (Jw, Jz)$ である。

注意 8 (“reversible” と呼ぶ由故)

$f: z \mapsto w$ を $C(J(z)) = C(w)$ で表わされる reversible map of triples とし、 $O_+(z; f) := \bigcup_{n>0} f^n(z)$, $O_-(z; f) := \bigcup_{n<0} f^n(z)$ とすると

$$J(O_+(z; f)) = O_-(Jz; f)$$

である。なぜなら、 f は reversible map of triples であるから、 $f: z \mapsto w \xLeftrightarrow{\text{iff}} f: Jw \mapsto Jz$ 。すなわち $w \in f(z) \xLeftrightarrow{\text{iff}} Jw \in f^{-1}(Jz)$ 。よって $f(z) = J^{-1} f^{-1} J(z)$ 。これを用いて任意の $n \in \mathbb{N}$ にたいして $f^n(z) = J^{-1} f^{-n} J(z)$ がいえる。したがって $J(O_+(z; f)) = O_-(Jz; f)$ となる。

【命題】 $f: z \mapsto w$ を $C(Jz) = C(w)$ で表わされる reversible map of triples とし、 $O_\pm(z; f) := O_+(z; f) \cup \{z\} \cup O_-(z; f)$ (uni-directional orbit) とすると、

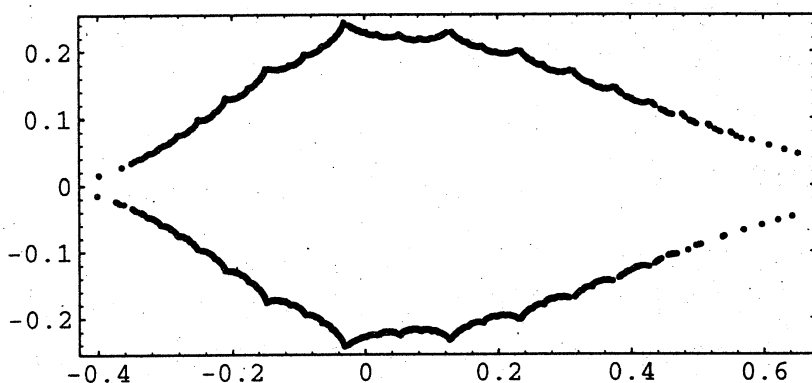
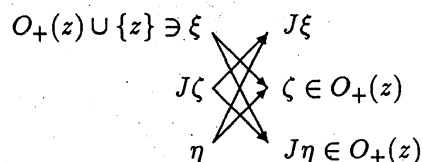
$$GO(z; f) = O_\pm(z; f) \cup O_\pm(Jz; f)。$$

(証明) $GO(z; f)$, $O_+(z; f)$, $O_-(z; f)$, $O_\pm(z; f)$ をそれぞれ $GO(z)$, $O_+(z)$, $O_-(z)$, $O_\pm(z)$ と略記する。

(D) $O_{\pm}(z) \subset GO(z)$ は明らか。また、 $J(z) \in f \circ f^{-1} \circ f(z) \subset GO(z)$ より、 $O_{\pm}(Jz) \subset GO(z)$ 。よって、 $GO(z; f) \supset O_{\pm}(z; f) \cup O_{\pm}(Jz; f)$ 。

(C) $\zeta \in O_{\pm}(z) \cup O_{\pm}(Jz) \implies f(\zeta) \cup f^{-1}(\zeta) \subset O_{\pm}(z) \cup O_{\pm}(Jz)$ (**) がいえれば、帰納法より $GO(z) \subset O_{\pm}(z) \cup O_{\pm}(Jz)$ がいえる。(**) を示す。 $\zeta = z$ のときは自明。よって $\zeta \in O_{+}(z)$ としてよい ($\zeta \in O_{-}(z)$, $\zeta \in O_{\pm}(Jz)$ のときも同様に示せる)。

$\zeta \in O_{+}(z)$ のとき、 $f(\zeta) \in O_{+}(z)$ であり、 $f^{-1}(\zeta) = \{\xi, \eta\}$ の一方は $O_{+}(z) \cup \{z\}$ の元であるから、それを ξ として η が $O_{\pm}(z) \cup O_{\pm}(Jz)$ の元であることを示せばよい。右図より $f(\xi) = \{\zeta, J\eta\}$ となっていて、 $\xi \in O_{+}(z) \cup \{z\}$ より、 $J\eta \in O_{+}(z)$ 。また、 $J(O_{+}(z)) = O_{-}(Jz)$ (上の注意 8 より) であるから、 $\eta = J \circ J(\eta) \in J(O_{+}(z)) = O_{-}(Jz)$ 。ゆえに、 $f(\zeta) \cup f^{-1}(\zeta) \subset O_{+}(z) \cup \{z\} \cup O_{-}(Jz)$ 。すなわち、(**) は示された。

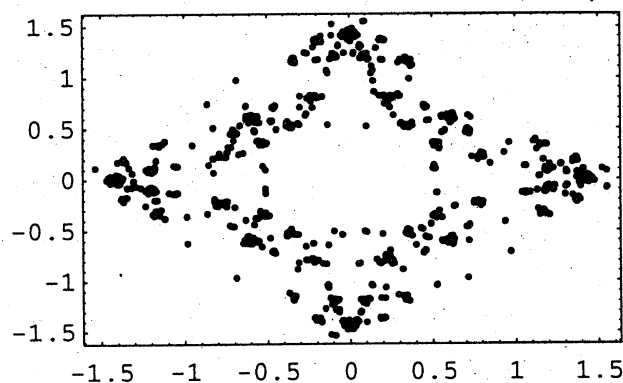


map of pairs

$$\frac{z(z+1)}{4} = \frac{w^2}{w+1}$$

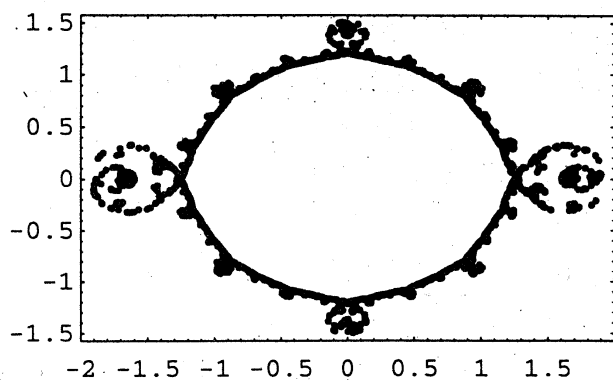
よって $z \mapsto w$

(forward 方向) の uni-directional orbits



$$-z^2 = w + \frac{1}{w} \quad \text{よって } w \mapsto z$$

方向の uni-directional orbits



$$z^2 = w \left(\frac{1 - 1.1w / (1.1^2 - 0.5^2)}{1 - w/1.1} \right)$$

よって $w \mapsto z$ 方向の

uni-directional orbits